J. Math. Pures Appl.,
76, 1997, *p.* 837-841

SUR UNE FORMULE DES CARACTÈRES POUR LES ALGÈBRES DE KAC-MOODY SYMÉTRISABLES

Par K. IOHARA (†)

RÉSUMÉ. – Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable. Dans [KW1], Kac et Wakimoto ont démontré une formule des caractères pour une grande classe de $\mathfrak{g}$-modules simples de plus grand poids qui comprend des $\mathfrak{g}$-modules intégrables comme cas particulier. Nous obtenons une extension de la formule de Kac et Wakimoto.

ABSTRACT. – Let $\mathfrak{g}$ be a symmetrizable Kac-Moody algebra. In [KW1], Kac and Wakimoto proved a character fomula for a large class of irreducible highest weight $\mathfrak{g}$-modules which includes integrable modules as a special case. We obtain an extension of Kac and Wakimoto's formula.

1. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Kac-Moody symétrisable et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan. Dans [KW1], Kac et Wakimoto ont démontré une formule des caractères des $\mathfrak{g}$-modules simples de plus grand poids lorsque ceux-ci sont les objets de la sous-catégorie $\mathcal{O}^g$ pleine de $\mathcal{O}$ introduite par Deodhar, Gabber et Kac [DGK]. Ils ont considéré une telle classe dans le but de classifier et décrire des représentations qui sont invariantes modulaires [KW2]. D'autre part, Kumar a obtenu la sous-catégorie $\mathcal{O}^{w.g.}$ pleine de $\mathcal{O}$ [Ku], qui est une bonne extension de $\mathcal{O}^g$. Dans cette note, la formule des caractères des $\mathfrak{g}$-modules simple de plus grand poids, lorsque ceux-ci sont les objets de $\mathcal{O}^{w.g.}$, sera démontrée sous une hypothèse formulée dans [KW1]. Il me semble que c'est probablement l'extension maximale de la formule de Weyl.

2. La catégorie $\mathcal{O}^{w.g.}$

Dans ce paragraphe, on explique le théorème de décomposition d'une sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$ [MP] et les propriétés de la catégorie $\mathcal{O}^{w.g.}$ [Ku].

Soit S un sous-ensemble de $\mathfrak{h}^*$ qui n'est pas vide. On dit que S est caractéristique [MP] s'il a la propriété suivante:

Soient $\lambda \in S$ et $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Si le $\mathfrak{g}$-module simple $L(\mu)$ de plus grand poids μ est un sous-quotient du module de Verma $M(\lambda)$ de plus grand poids λ, alors on a $\mu \in S$.

(†) JSPS Research Fellow

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES. – 0021-7824/1997/09/$ 7.00

Dans l'ensemble S, on définit des relations, notées $\succ, \sim$, de la façon suivante :

(I) Si $\lambda, \mu \in S$, alors $\lambda \succ \mu$ si et seulement si le $\mathfrak{g}$-module simple $L(\mu)$ de plus grand poids μ est un sous-quotient du module de Verma $M(\lambda)$ de plus grand poids λ.

(II) Si $\lambda, \mu \in S$, alors $\lambda \sim \mu$ si et seulement si il existe une chaîne finie (pour un entier n) $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n = \mu$ avec tout $\lambda_i \in S$ telle que $\lambda_i \succ \lambda_{i+1}$ ou $\lambda_{i+1} \succ \lambda_i$ pour tout $0 \leq i < n$.

On note que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble S.

Un exemple important pour nous est le sous-ensemble $K^{w.g.}$ de $\mathfrak{h}^*$ introduit par Kumar [Ku] de la façon suivante.

Soient Δ (resp. Δ^{re}, Δ^{im}) l'ensemble des racines (resp. racines réelles, racines imaginaires), Δ_+^* $(* = \cdot, re, im)$ le sous-ensemble de Δ^* qui est constitué par les racines positives et W le groupe de Weyl. Fixons une forme bilinéaire $(\cdot,\cdot)$ qui est standard, symmétrique, invariante et non dégénérée, et un élément $\rho \in \mathfrak{h}^*$ tel que $\rho(h_i) = 1$ pour toutes les coracines simples h_i. (Voir [Ka] pour plus de détails.) Pour tout $\alpha \in \Delta_+^{im}$, on pose

$$T_\alpha := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | 2(\lambda + \rho, \alpha) = (\alpha, \alpha)\}$$

et

$$T := \cup_{\alpha \in \Delta_+^{im}} T_\alpha, \qquad K^{w.g.} := \mathfrak{h}^* \setminus T.$$

On définit une action déplacée de W sur $\mathfrak{h}^*$ de la façon suivante. Pour $w \in W$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, posons :

$$w \circ \lambda := w(\lambda + \rho) - \rho.$$

Remarque. – $K^{w.g.}$ est stable sous l'action déplacée de W.

Le théorème suivant est connu :

THÉORÈME 2.1 ([KK], [Ku]). – *Soient $\lambda \in K^{w.g.}$ et $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tels que $\lambda \neq \mu$. Alors $L(\mu)$ est un sous-quotient de $M(\lambda)$ si et seulement si ils existent $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \Delta_+^{re}$ et $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n = \mu \in \mathfrak{h}^*$ (pour un entier positif n) tels que :*

$$(1) \qquad 2(\lambda_{i-1} + \rho, \beta_i) \in (\beta_i, \beta_i)\mathbb{Z}_{>0},$$
$$(2) \qquad r_{\beta_i} \circ \lambda_{i-1} = \lambda_i \qquad \textit{pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

où r_{β_i} désigne une réflexion de W.

Pour chaque $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on définit le sous-ensemble Δ^λ de Δ et le sous-groupe W^λ de W de la façon suivante :

$$\Delta^\lambda := \left\{\alpha \in \Delta^{re} | 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}\right\},$$
$$W^\lambda := \langle r_\alpha | \alpha \in \Delta^\lambda \cap \Delta_+ \rangle.$$

Voir [MP] pour les propriétés de Δ^λ et W^λ.

COROLLAIRE 2.2. – *Soient $\lambda, \mu \in K^{w.g.}$. Alors $\lambda \sim \mu$ si et seulement si $\mu \in W^\lambda \circ \lambda$.*

On définit la sous-catégorie $\mathcal{O}_S$ associée au sous-ensemble caractéristique S de $\mathfrak{h}^*$ de la façon suivante :

DÉFINITION 2.1.

(I) $\mathcal{O}_S$ est la sous-catgorie pleine de $\mathcal{O}$ formée des objets M de $\mathcal{O}$ dont tous les facteurs $L(\mu)$ de la composition de M satisfont $\mu \in S$.

(II) Pour chaque classe d'équivalence $[\lambda] \in S/\sim$, $\mathcal{O}_{[\lambda]}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}_S$ formée des objets M de $\mathcal{O}_S$ dont tous les facteurs $L(\mu)$ de la composition de M satisfont $\mu \in [\lambda]$.

En particulier on désigne $\mathcal{O}^{w.g.}$ par $\mathcal{O}_{K^{w.g.}}$.

Remarque. – Si $\lambda \in S$, alors $M(\mu) \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}_{[\lambda]}$ pour tout $\mu \in [\lambda]$.

En utilisant une idée de [DGK], on a le théorème de décomposition de la catégorie $\mathcal{O}_S$ [MP].

THÉORÈME 2.3 ([DGK], [Ku], [MP]). – *Pour tout $M \in Ob\mathcal{O}_S$, il existe une seule famille $\{M_{[\lambda]}\}_{[\lambda]}$ de sous-modules de M, telle que*

$$(1) \qquad M_{[\lambda]} \in Ob\mathcal{O}_{[\lambda]},$$
$$(2) \qquad M = \oplus_{[\lambda]} M_{[\lambda]}.$$

3. Une formule des caractères

Dans ce paragraphe on démontre une formule des caractères. La preuve utilise les foncteurs de la translation introduits par Jantzen [J]. Soit $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ l'ensemble des racines simples et $\mathcal{P}_+$ l'ensemble des poids dominants entiers. Pour $\theta \in \mathcal{P}_+$, il existe une base $\{v_i | i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ de $L(\theta)$ qui satisfait les conditions suivantes :

(i) v_i est un vecteur de poids θ_i,

(ii) $\theta_i - \theta_j \in \oplus_{k=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_k \setminus \{0\} \Rightarrow i < j$.

Deodhar, Gabber et Kac ont démontré le lemme fondamental suivant :

LEMME 3.1 ([DGK]). – *Soit M un $\mathfrak{g}$-module de plus grand poids $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors,*

(I) *$M \otimes L(\theta)$ a une série de composition faible:*

$$(0) = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots, \ \cup P_j = M \otimes L(\theta)$$

telle que P_i/P_{i-1}, si non-nul, est un $\mathfrak{g}$-module de plus grand poids $\lambda + \theta_i$ pour tout $i > 0$.

(II) *En particulier si $M = M(\lambda)$, alors $P_i/P_{i-1} \cong M(\lambda + \theta_i)$ pour tout $i > 0$.*

Maintenant on définit les foncteurs de la translation de la façon suivante. D'après le Théorème 2.3, pour tout $M \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}$ on a $M = \oplus M_{[\lambda]}$ tel que $M_{[\lambda]} \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}_{[\lambda]}$ ($[\lambda] \in \mathfrak{h}^*/\sim$). On désigne par $\pi_{[\lambda]}$ le foncteur de la projection

$$\pi_{[\lambda]} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_{[\lambda]}, \ M \mapsto M_{[\lambda]}.$$

Soient $\lambda, \mu \in K^{w.g.}$ tels que $W(\mu - \lambda) \cap \mathcal{P}_+ = \{\Lambda\}$ pour un poids $\Lambda \in \mathcal{P}_+$. Dans ce cas, on a $\Delta^\lambda = \Delta^\mu$ et $W^\lambda = W^\mu$.

Remarque. – Si $M \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}^g$ et $\Lambda \in \mathcal{P}_+$, alors $M \otimes L(\Lambda) \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}^g$. Mais en général $M \otimes L(\Lambda) \notin \mathrm{Ob}\mathcal{O}^{w.g.}$ même si $M \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}^{w.g.}$.

DÉFINITION 3.1 ([J]). – Le foncteur de la translation $T_{[\lambda]}^{[\mu]} : \mathcal{O}_{[\lambda]} \longrightarrow \mathcal{O}_{[\mu]}$ est défini par

$$T_{[\lambda]}^{[\mu]}(M) := \pi_{[\mu]}(M \otimes L(\Lambda)) \quad \text{pour } M \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}_{[\lambda]}.$$

Remarque. – Le foncteur $T_{[\lambda]}^{[\mu]}$ est additif et exact.

Une propriété importante de ces foncteurs est donnée par la proposition suivante. Pour $a \in \mathbb{C}$, on note $a > 0$ si et seulement si on a Re $a > 0$, ou Re $a = 0$ et Im $a > 0$.

PROPOSITION 3.2. – *Soient $\lambda, \mu \in K^{w.g.}$ tels que $W(\mu - \lambda) \cap \mathcal{P}_+ = \{\Lambda\}$. Par ailleurs on suppose que*

(i) $(\lambda + \rho, \alpha) \neq 0$,

(ii) $(\lambda + \rho, \alpha) > 0$ *(resp. < 0) implique $(\mu + \rho, \alpha) \geq 0$ (resp. ≤ 0)*

pour tout $\alpha \in \Delta^\lambda$. Alors

$$T_{[\lambda]}^{[\mu]}(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ \mu) \quad \forall w \in W^\lambda.$$

Démonstration. – Puisque $M(w \circ \lambda) \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}_{[\lambda]}$ pour tout $w \in W^\lambda$, on a

$$T_{[\lambda]}^{[\mu]}(M(w \circ \lambda)) = \pi_{[\mu]}(M(w \circ \lambda) \otimes L(\Lambda)).$$

D'après le Lemme 3.1, $M(w \circ \lambda) \otimes L(\Lambda)$ a une série de composition faible avec les facteurs $M(w \circ \lambda + \theta)$ pour tout $\theta \in \mathcal{P}(\Lambda)$, où $\mathcal{P}(\Lambda)$ est l'ensemble des poids de $L(\Lambda)$. Donc il suffit de montrer l'énoncé suivant :

Il existe un seul poids $\theta \in \mathcal{P}(\Lambda)$ et un seul élément $w' \in W^\mu = W^\lambda$, tels que $w \circ \lambda + \theta = w' \circ \mu$. En particulier on a $w' = w$.

Posons $\lambda' = \lambda + \rho, \theta' = w^{-1}\theta, \mu' = \mu + \rho$ et $v = w^{-1}w'$, on peut montrer l'énoncé ci-dessus de manière analogue que [KW1]. □

On pose

$$\Pi^\lambda = \{\alpha \in \Delta^\lambda \cap \Delta_+ | \ \alpha \text{ n'est pas égale à une somme d'éléments de } \Delta^\lambda \cap \Delta_+ \ \}.$$

LEMME 3.3. – *Soit $\lambda \in K^{w.g.}$ tel que $\Delta^\lambda \neq \phi$ et $(\lambda + \rho, \beta) > 0$ pour tout $\beta \in \Delta^\lambda \cap \Delta_+$. Alors pour chaque $\alpha \in \Pi^\lambda$, il existe $\mu \in K^{w.g.}$ tel que :*

(i) $(\mu + \rho, \alpha) = 0$, $(\mu + \rho, \beta) > 0$ *pour tout* $\beta \in \pi^\lambda \backslash \{\alpha\}$,

(ii) $W(\mu - \lambda) \cap \mathcal{P}_+ \neq \phi$.

Pour tout $M \in \mathrm{Ob}\mathcal{O}$, on note ch$M$ le caractère formel, et pour tout $w \in W^\lambda$, on note $l(w)$ la longeur d'une décomposition réduite de w. On pose $\varepsilon(w) = (-1)^{l(w)}$.

THÉORÈME 3.4. – *Soit $\lambda \in K^{w.g.}$ tel que $(\lambda + \rho, \alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^\lambda \cap \Delta_+$. Alors, on a :*

$$chL(\lambda) = \sum_{w \in W^\lambda} \varepsilon(w) chM(w \circ \lambda).$$

Démonstration. – On a

$$\mathrm{ch}L(\lambda) = \sum_{w \in W^\lambda} m(\lambda, w)\mathrm{ch}M(w \circ \lambda), \quad m(\lambda, 1) = 1. \tag{1}$$

D'après le Lemme 3.3, on applique le foncteur $T_{[\lambda]}^{[\mu]}$ à une suite exacte :

$$M(\lambda)/M(r_\alpha \circ \lambda) \to L(\lambda) \to 0.$$

D'après la Proposition 3.2 et l'exactitude de $T_{[\lambda]}^{[\mu]}$, on a $T_{[\lambda]}^{[\mu]}(L(\lambda)) = 0$. En appliquant $T_{[\lambda]}^{[\mu]}$ à (1), on obtient $m(\lambda, w) + m(\lambda, wr_\alpha) = 0$. Puisque $W^\lambda = \langle r_\alpha | \alpha \in \Pi^\lambda \rangle$, on déduit que $m(\lambda, w) = \varepsilon(w)$. $\square$

Remarque. – Soit $\lambda \in K^{w.g.}$ tel que $(\lambda + \rho, \alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta^\lambda \cap \Delta_+$. En général, ch$L(\lambda)$ n'est pas invariant sous l'action de W^λ. C'est W^λ-invariant si et seulement si $\Pi^\lambda \subset \Pi$. (cf. [KW1])

Remerciement

Je tiens à remercier S. Naito et M. Wakimoto pour d'utiles discussions et suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[DGK] V. Y. DEODHAR, O. GABBER et V. KAC, Structure of Some Categories of Representations of Infinite-Dimensional Lie algebras, *Adv. in Math.*, *45*, 1982, p. 92-116.

[J] J. C. JANTZEN, Moduln mit einem höchsten Gewicht, *Lect. Notes in Math.*, *750*, Springer-Verlag, 1979.

[Ka] V. G. KAC, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd. ed., Cambr. Univ. Press, 1991.

[KK] V. G. KAC et D. A. KAZHDAN, Structure of Representations with Highest Weight of Infinite-Dimensional Lie Algebras, *Adv. in Math.*, *34*, 1979, p. 97-108.

[Ku] S. KUMAR, Extension of the Category $\mathcal{O}^g$ and a Vanishing Theorem for the Ext Functor for Kac-Moody Algebras, *Jour. Alg.*, *108*, 1987, p. 472-491.

[KW1] V. G. KAC et M. WAKIMOTO, Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, *85*, 1988, p. 4956-4960.

[KW2] V. G. KAC et M. WAKIMOTO, Classification of modular invariant representations of affine algebras, *Adv. Ser. Math. Phys.*, *7*, World Scientific, 1989, p. 138-177.

[MP] R. V. MOODY et A. PIANZOLA, *Lie Algebras With Triangular decompositions*, Wiley-Intersc. Publ. 1995.

(Manuscrit reçu octobre 1996.)

K. IOHARA
Department of Mathematics,
Faculty of Science,
Kyoto University,
Kyoto 606, Japan.